

Colegiul Național „Gheorghe Lazăr” Sibiu

Brodețchi Mircea

DIVIZIBILITATE – NUMERE PRIME

Auxiliar curricular - util în pregătirea pentru olimpiade și concursuri

Divizibilitatea și, în mod special, *numerele prime* se constituie ca teme aritmetice cu probleme deosebit de interesante, des întâlnite la olimpiadele și concursurile școlare. De aceea, consider util pentru elevi un material care aduce în atenție această problematică prin aplicații selectate și grupate după metode de rezolvare, noțiuni sau algoritmi utilizați. Problemele sunt recomandate atât pentru gimnaziu (notate G) cât și pentru liceu (notate L).

Există aici atât probleme simple, de aplicare directă a teoriei cât și probleme pretențioase ce necesită un efort de gândire mai mare. Toate au atașată o rezolvare completă sau indicații de abordare. Problemele au fost selectate dintre cele propuse la olimpiadele școlare, din ediții mai vechi ale *Gazetei matematice* și din culegeri de probleme de aritmetică.

Autorul

Noțiunea de număr prim

1. (G) a) Să se arate că 1993 este număr prim.
b) Care dintre numerele 1993^{1994} și 1994^{1993} are mai mulți divizori ?
(O.L. Călărași, 1993)

Rezolvare și observații. Punctul a) al problemei poate fi utilizat la clasă, el presupunând aplicarea directă a algoritmului de verificare dacă un număr este sau nu prim.

b) Dacă clasa este de nivel mediu sau scăzut, la acest punct se poate formula ca cerință ajutătoare descompunerea în factori primi a numărului 1994.

Numărul 1993^{1994} are ca divizori pe: 1, 1993, 1993^2 , . . . , 1993^{1994} adică 1995 divizori. Numărul $1994^{1993} = 2^{1993} \cdot 997^{1993}$ are mult mai mulți divizori.

Pentru a fi convinși se pot enumera divizorii:

1, 2, 2^2 ,, 2^{1993} ,
997, $997 \cdot 2$, $997 \cdot 2^2$,, $997 \cdot 2^{1993}$,
.....
 997^{1993} , $997^{1993} \cdot 2$, $997^{1993} \cdot 2^2$,, $997^{1993} \cdot 2^{1993}$.

2. (G) Suma a 6 numere întregi consecutive este un număr prim. Să se afle cele 6 numere.

Rezolvare. Fie $S = (n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 6n + 3$ suma celor șase numere consecutive. Dacă $S = 3(2n + 1)$ este număr prim. Atunci $2n + 1 = 1$ iar $n = 0$. Deci numerele sunt: -2, -1, 0, 1, 2, 3.

3. (G) Să se determine numerele prime de trei cifre, știind că produsul cifrelor sale este 252.

Rezolvare. Deoarece $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ atunci numărul prim ar putea fi format din cifrele: 4, 9 și 7 sau 6, 6 și 7. Pentru fiecare dintre numerele formate cu aceste cifre se verifică dacă este sau nu număr prim.

4. (G) Să se determine numerele prime de trei cifre, știind că produsul cifrelor sale este 441.

Rezolvare. Asemănătoare cu cea a problemei anterioare.

5. (G) Să se determine cel mai mic număr prim de patru cifre.

Rezolvare. Se justifică pe baza criteriilor de divizibilitate de ce numerele 1000, 1002, 1004, 1005, 1006, 1008 nu sunt prime și apoi se verifică pe rând numerele 1003, 1007, 1009. Acesta din urmă se va dovedi a fi prim.

6. (G) Se dă mulțimea: $A = \{1, 3, 5\}$. Câte numere prime de forma \overline{aab} , \overline{aba} se pot forma cu elementele acestei mulțimi ?

Rezolvare. Se verifică dacă numerele 113, 331, 553, 551, 131, 151, 313, 353, sunt prime prin împărțiri la toate numerele prime până când împărțitorul devine mai mare decât câtul.

Observație. Problemele 2, 3, 4, 5, 6 presupun doar cunoașterea noțiunii de număr

prim și a modului de aflare prin împărțiri succesive la numere prime (mai mici decât \sqrt{n}) dacă numărul n dat este sau nu prim. Astfel, datorită gradului scăzut de dificultate pot fi utilizate la clasă, în etapa de fixare, imediat următoare celei de predare a cunoștințelor.

Dacă se dorește o complicare a sarcinii de lucru li se poate cere elevilor să compună ei înșiși o problemă similară problemelor 3, 4, 5 sau 6.

7. (G, L) Se dă numărul $A = 100 \dots 01$, numărul zerourilor fiind 100. Să se demonstreze că acest număr nu este prim.

(I. Anastasiu – G. M. nr. 2/1981)

Rezolvare. $A = 10^{101} + 1 = 10^{101} + 1^{101} = (10 + 1)(10^{100} - 10^{99} + \dots + 1)$. Deci numărul dat este divizibil cu 11.

8. (G) Să se găsească toate numerele prime care sunt mai mici cu o unitate decât un cub perfect.

(M. Lascu – G.M. nr. 9/1985)

Rezolvare. Numerele întregi pozitive mai mici cu o unitate decât un cub perfect sunt de forma $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ unde $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Pentru a

putea fi prime, ținând cont că $n^2 + n + 1 > 1$ pentru $n > 1$, este necesar ca $n - 1 = 1$ adică $n = 2$ și atunci $n^3 - 1 = 7$

9. (G) *Suma dintre un număr prim și un număr impar este 2003. Aflați cele două numere.*

Rezolvare. Numărul prim trebuie să fie par ca suma să poată fi impară. Deci, numărul prim este 2 iar numărul impar 2001.

10. (G*) *Arătați că nu există nici un număr prim astfel încât suma dintre el și $n^2 + n$ să fie 1984, unde $n \in \mathbb{N}$.*

(N. Tălău – G.M. nr 9/1984)

Rezolvare. $n^2 + n = n(n + 1)$ este număr par pentru $n \in \mathbb{N}^*$ iar dacă suma dintre acest număr și un număr prim ar fi 1984 atunci numărul prim ar trebui să fie și el număr par. Deci numărul prim ar putea fi doar 2. În acest caz, obținem că $1982 = 2 \cdot 991$ ar fi produsul a două numere naturale consecutive ceea ce este fals.

11.(G) *Să se arate că un număr de patru cifre, având cifrele identice două câte două, nu poate fi prim.*

(D. Acu - G.M. nr 7/1979)

Rezolvare. Numerele $\overline{aabb} = 11(100a + b) = M_{11}$; $\overline{abab} = 101(10a + b) = M_{101}$, $\overline{abba} = 11(91a + 10b) = M_{11}$ sunt compuse.

Numere prime ce verifică anumite condiții date

12.(G) *Aflați numerele prime a, b, c știind că $2a + 3b + c = 21$. Se cer toate soluțiile.*

(O. J. Suceava, 1993)

Rezolvare. Deoarece $2a$ este număr par iar suma este număr impar rezultă că suma $3b + c$ este număr impar. Deci unul dintre termenii săi este par iar celălalt impar. Se disting astfel două cazuri:

Dacă c este număr par atunci $c = 2$ iar $2a + 3b = 19$. În continuare putem avea situațiile: $a = 2$ și $b = 5$ sau $a = 5$ și $b = 3$

Dacă $3b$ este număr par atunci $b = 2$ iar $2a + c = 15$. Apoi obținem $a = 2, c = 11$, sau $a = 5$ și $c = 5$.

13.(G) *Determinați numerele naturale a, b, k astfel încât \overline{ab} și \overline{ba} să fie prime iar $a + b = k^2$*

(O. J. Bistrița Năsăud, 1994)

Rezolvare. Dintre numerele prime de două cifre se aleg acelea care îndeplinesc condiția ca și răsturnatul lor să fie număr prim. Acestea sunt 11, 13, 17, 37, 79. Dintre acestea îndeplinesc condiția ca suma cifrelor să fie un pătrat perfect doar numărul 13 și 79. Deci $a=1, b=3, k=2$ sau $a=7, b=9, k=4$.

14.(G) *Să se găsească două numere prime astfel ca suma lor să fie un număr natural de forma \overline{aa} .*

(O. L. Olt, 1992)

Rezolvare. Având în față tabloul numerelor prime mai mici decât 100, elevii le vor grupa câte două astfel încât suma lor să fie de forma cerută. Obținem varianțele: 2 și 53; 13 și 31; 17 și 71.

Observație. Problemele **13** și **14** pot fi rezolvate după ce s-a întocmit *Ciurul lui Eratostene* pentru numerele naturale mai mici decât 100 și se pot rezolva cu întreaga clasă, ele presupunând doar simpla verificare a îndeplinirii condițiilor date.

15.(G) *Determinați numerele prime a și b știind că $a - b = p^n$; unde p este un număr prim, $n \in \mathbb{N}$ și că $a + b = 150$.*

Rezolvare. Adunând membru cu membru cele două egalități obținem: $2a = 150 + p^n$. Deducem că p este un număr par dar fiind și prim, obținem $p = 2$ iar $a = 75 + 2^{n-1}$. Cum $a < 150$, obținem $n < 8$.

Analizând toate cazurile pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ obținem:

$$\begin{cases} a = 79 \\ b = 71 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 83 \\ b = 67 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 107 \\ b = 43 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 139 \\ b = 11 \end{cases}.$$

16.(G) Să se determine numerele prime p pentru care numerele $24p + 1$ sunt pătrate perfecte.

Rezolvare. Deoarece $24p + 1$ este număr impar, $24p + 1 = (2k + 1)^2$. Deducem că $6p = k(k + 1)$. Deci $6p$ trebuie să fie produsul a două numere naturale consecutive. Având în vedere că $6p$ se poate descompune în produs de doi factori doar în următoarele trei moduri: $2p \cdot 3$, $3p \cdot 2$ sau $6 \cdot p$, obținem $p = 2$, $p = 5$ sau $p = 7$. Pentru orice $p > 7$ factorii nu sunt consecutivi.

17. (G) Să se găsească că numărul prim \overline{abc} , știind că \overline{cba} și \overline{bca} sunt numere prime iar $a + b + c = \overline{ac}$.

(Ș. Anastase – G. M. nr. 6/1982)

Rezolvare. Din $a + b + c = \overline{ac}$ obținem $a + b + c = 10a + c$, adică $b = 9a$. Deci $a = 1$ iar $b = 9$. Pentru c rămân variantele $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dintre care doar pentru $c = 7$ se obțin numerele \overline{abc} , \overline{cba} și \overline{bca} prime.

18.(G) Să se găsească a, b, c numerele naturale prime astfel ca $a^3 b^2 c^2 + a^2 b^2 c + a = 1982$.

(M. Lucu – G. M. nr. 8/1982)

Rezolvare. Din relația dată obținem $a(a^2 b^2 c^2 + ab^2 c + 1) = 1982$ și cum paranteza e mai mare decât 2, deducem $a = 2$. Apoi $a^2 b^2 c^2 + ab^2 c + 1 = 991$ de unde $b^2 c (ac + b) = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Deducem $b = 3$ și $c = 5$.

19.(G,L) Să se afle numerele prime care se pot reprezenta atât ca sumă cât și ca diferență de două numere prime.

Rezolvare. Fie p un număr prim care se reprezintă ca sumă și ca diferență de două numere prime. Evident $p > 2$ și deci p este impar și atunci unul din termenii sumei și ai diferenței trebuie să fie 2. Fie $p = q + 2 = r - 2$ cu p și r prime. Cum $r = p + 2$ și $q = p - 2$ rezultă că trebuie ca $p - 2$, p , $p + 2$ să fie simultan prime. Fiindcă dintre trei numere consecutive impare unul este divizibil cu 3, singurul triplet care convine este 3, 5, 7. Deci $p = 5$.

20.(L) Dacă un număr prim este de forma $2^n + 1$, atunci $n = 0$ sau $n = 2^k$ cu $k = 0, 1, 2, \dots$

Rezolvare. Dacă n este număr impar atunci $2^n + 1$ se divide prin $2 + 1 = 3$. Dacă n este par el se poate scrie $n = 2^k \cdot m$; unde $m \geq 1$ este impar sau $n = 0$. Pentru $m \geq 1$ numărul $2^n + 1 = 2^{2^k \cdot m} + 1$ se divide prin $2^{2^k} + 1$, deci este compus. Rămâne $m = 1$, adică $n = 2^k$.

21.(L) Dacă numărul $a^\alpha + b^\beta$ unde $(a,b) = 1$ este prim, atunci $(\alpha,\beta) = 1$ sau $(\alpha,\beta) = 2^k$.

Rezolvare. Fie $(\alpha,\beta) = d$ cu $\alpha = dm$, $\beta = dn$, $(m,n) = 1$. Pentru $d > 1$ impar, numărul $a^\alpha + b^\beta = (a^m)^d + (b^n)^d$ se divide prin $a^m + b^n$. Pentru d par putem scrie $d = 2^k q$, cu q număr impar, $q \geq 1$. Pentru $q \geq 1$ numărul $a^\alpha + b^\beta = (a^{m \cdot 2^k})^q + (b^{n \cdot 2^k})^q$ se divide prin $a^{m \cdot 2^k} + b^{n \cdot 2^k}$, deci este compus. Rămâne $q = 1$ adică $d = 2^k$ și astfel $(\alpha,\beta) = 2^k$.

22.(L) Dacă $2^n - 1$ este prim, atunci n este prim.

Rezolvare. Presupunem prin absurd că n este număr compus, $n = ab$ cu $a > 1$, $b > 1$. Obținem $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$ care se divide prin $2^a - 1 \neq 1$, contradicție.

Numere simultan prime

23. (G) Să se afle numerele naturale n pentru care fiecare din numerele: $n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 15$ este număr prim.

(O. L. Argeș, 1994)

Rezolvare. Se analizează pe rând cazurile $n \in \{5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4\}$, $k \in \mathbb{N}$. Singurul caz în care se obțin cinci numere prime de forma dată este $n = 5k + 4$ pentru $k = 0$, adică $n = 4$. Se obțin numere prime 5, 7, 11, 13, 19.

24.(G) Fie numerele $n, n + 2, n + 6, n + 14, n + 18$, cu $n \in \mathbf{N}^*$. Găsiți un număr n astfel încât cele cinci numere să fie simultan prime.

(O. J. Neamț, 1994)

Rezolvare. Se rezolvă ca și problema **23**.

25.(G) Dacă numerele naturale $n, n + 1, n + 3$ sunt prime atunci numărul $n^{n+3} + (n + 1)^n + (n + 3)^{n+1}$ este prim?

(O. J. Prahova, 1992)

Rezolvare. Numerele n și $n + 1$ fiind prime rezultă $n = 2, n + 1 = 3, n + 3 = 5$. Calculând $n^{n+3} + (n + 1)^n + (n + 3)^{n+1}$ obținem $2^5 + 3^2 + 5^3 = 166$ care nu este număr prim.

26.(L) Să se determine numerele naturale n pentru care $2^n - 1$ și $2^n + 1$ sunt simultan prime.

Rezolvare. Combinând rezultatele problemelor **20** și **22** deducem $n = 2$.

27.(G) Să se găsească numerele naturale p astfel încât numerele $p, p^2 + 4, p^2 + 6$ să fie numere prime.

(O. J. Galați, 1994)

Rezolvare. Evident p nu poate fi număr par. Dacă p se termină în 1 sau 9, atunci $p^2 + 4 : 5$, iar dacă se termină în 3 sau 7 atunci $p^2 + 6 : 5$. Rămâne că p se termină în cifra 5 și fiind număr prim deducem $p = 5$.

28.(G) Determinați numărul natural prim p pentru care $p^2 + 4$ și $p^2 + 8$ sunt de asemenea numere prime.

(G.M., nr. 4/1986)

Rezolvare. Analizăm cazurile $p \in \{3k; 3k + 1; 3k + 2\}, k \in \mathbf{N}^*$. Dacă $p = 3k + 1$, atunci $p^2 + 8 = M_3 + 1 + 8 = M_3$. Dacă $p = 3k + 2$, atunci $p^2 + 8 = M_3 + 4 + 8 = M_3$. Deci $p = 3k$ și fiind număr prim obținem $p = 3$ iar $p^2 + 8 = 17$ și $p^2 + 4 = 13$.

29. (G) Să se determine numerele prime p pentru care numerele $p + 4$, $p + 24$, $p^2 + 10$, $p^2 + 34$ sunt simultan prime.

Rezolvare. Analizând cazurile $p \in \{7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6\}$, $k \in \mathbf{N}^*$ și raționând ca și la problema precedentă obținem $p = 7$.

30. (G) Să se arate că numerele p , $2p^2 - 3$, $2p^2 + 3$ sunt simultan prime numai pentru $p = 5$.

Rezolvare. Pentru $p = 5$ obținem numerele prime 5, 47, 53. Dacă p este un număr prim diferit de 5, atunci, $p \in \{5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4\}$, $k \in \mathbf{N}^*$. Obținem $p^2 = M_5 \pm 1$ și deci $5 \mid 2p^2 - 3$ sau $5 \mid 2p^2 + 3$.

Numere prime între ele

31. (G) Să se arate că numerele $10n + 3$ și $15n + 4$ sunt prime între ele pentru orice număr natural n .

(O. J. Neamț, 1992)

Rezolvare. Fie d cel mai mare divizor comun al celor două numere. Atunci $d \mid 10n + 3$ și $d \mid 15n + 4$. Deci $d \mid [3(10n + 3) - 2(15n + 4)]$ adică $d \mid 1$.

32. (G) Să se arate că numerele $10n + 53$ și $7n + 37$ sunt prime între ele pentru orice număr natural n .

Rezolvare. Se rezolvă la fel ca și problema **31**.

33. (G) Să se arate că fracția $\frac{x+1}{2x+1}$ este ireductibilă oricare ar fi $x \in \mathbf{N}^*$.

(O. J. Călărași, 1993)

Rezolvare. Fie d un divizor comun al numărătorului și numitorului fracției date. Atunci $d \mid x + 1$ și $d \mid 2x + 1$. Deci $d \mid [2(x+1) - (2x+1)]$ adică $d \mid 1$. Astfel, numitorul și numărătorul fiind numere prime între ele fracția este ireductibilă.

Observație. Problemele **31**, **32**, **33** sunt accesibile la clasă dacă elevii au rezolvat în ciclul primar sau în clasa a V – a probleme aritmetice cu metoda comparației. La cercurile de matematică li se poate propune elevilor să creeze ei astfel de probleme.

34. (G) *Să se demonstreze că $\overline{3xy}$ și 137 sunt prime între ele, oricare ar fi cifrele x și y .*

(G. Mărgineanu – G. M. nr. 5/1980)

Rezolvare. Numărul 137 este prim. Dar $2 \cdot 137 = 411$. Deci multiplii lui 137 nu pot fi de forma $\overline{3xy}$.

35.(G) *Câte numere relativ prime cu 1979^{1980} nu sunt prime cu 1979 ?*

(P. Simion – G. M. nr 1/1980)

Rezolvare. Numărul 1979 este număr prim. Atunci numerele mai mici decât 1979^{1980} care nu sunt prime cu 1979 vor fi toate puterile lui 1979 de la 1 la 1979, adică $1979, 1979^2, 1979^3, \dots, 1979^{1979}$, adică 1979 de numere.

36.(G,L) *Să se afle $k \in \mathbf{N}^*$ pentru care $8^k + 1$ și 585 sunt relativ prime.*

(A. Cindrea – G.M nr 8/1986)

Rezolvare. Se descompune 585 în factori primi: $585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$. Se observă că $8^k + 1$ se divide prin $8 + 1$ dacă k este număr impar. Dacă $k = 4t + 2$ cu $t \in \mathbf{N}^*$, atunci ultima cifră a lui 8^k este $U(8^k) = 4$ iar $U(8^k + 1) = 5$ și astfel numerele date vor avea ca divizor comun pe 5. Dacă $k = 4t$, cu $t \in \mathbf{N}^*$, atunci $8^k + 1 = 8^{4t} + 1 = 4096^t + 1 = (M_9 + 1)^t + 1 = (M_{13} + 1)^t + 1$. Astfel, în această situație numărul nu se divide cu 9 sau cu 13 și în plus nici cu 5 deoarece ultima sa cifră este 7. Deci, pentru $k = 4t$, $t \in \mathbf{N}^*$ numerele $8^k + 1$ și 585 sunt prime între ele.

Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime

- 37.(G)** Aflați unu număr prim de trei cifre a cărui răsturnare este tot număr prim, știind că pătratul produsului cifrelor sale este 35721.
(O. J. Hunedoara, 1994)

Rezolvare. Fie \overline{abc} numărul prim căutat. Deci $(a \cdot b \cdot c)^2 = 35721 = (3 \cdot 7 \cdot 9)^2$. Ținând cont că și \overline{cba} este număr prim, deducem că numărul căutat este 379.

- 38.(G)** Descompuneți pe rând numerele 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 în produs de numere prime.
(G. M. nr 4/1986)

Rezolvare. Avem $111 = 3 \cdot 37$, $1111 = 11 \cdot 101$, $11111 = 41 \cdot 271$, ...

- 39. (G)** Se consideră următoarea descompunere în factori primi: $\overline{aaa} = b \cdot a \cdot \overline{ba}$. Determinați cifrele a și b .
(N. Grigorescu – G.M. nr 2 – 3/1982)

Rezolvare. Avem $\overline{aaa} = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$. Deci $a = 3$ și $b = 7$.

- 40.(G)** Se dă numărul $A = \overline{3xx3x}$. Să se găsească cifra x astfel încât numărul A să fie produs de numere consecutive.
(R. Marinescu, G.M. nr 1/1982)

Rezolvare. Scriem $\overline{3xx3x} = 3(10010 + x \cdot 337) = 3(2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + x \cdot 337)$. Având pe 3 factor și impunând ca numărul să aibă factori numere prime consecutive se deduce că $x = 0$.

- 41.(G)** Să se determine cifrele a și b , știind că numărul $N = \overline{abbabb}$, scris în baza 10, se descompune într-un produs de 6 factori primi consecutivi.
(I. Indre – G. M. nr. 7/1977)

Rezolvare. $N = \overline{abb} \cdot 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13(100a + 11b)$. Pentru $a = 2$ și $b = 5$, $N = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

42.(G) Să se determine numerele naturale de 4 cifre a căror descompunere în factori primi este $a^5 \cdot b^5$.

Rezolvare. $2^5 \cdot 3^5 = 7776$; $1^5 \cdot 5^5 = 3125$. Alte soluții nu mai există deoarece numerele $2^5 \cdot 5^5$, 7^5 au deja mai mult de patru cifre.

Numere prime gemene

43.(L) Pentru n impar și $n > 1$, numerele n și $n + 2$ sunt prime dacă și numai dacă $(n - 1)!$ nu se divide cu n și nu se divide cu $n + 2$.

Rezolvare. Presupunem mai întâi că numerele n și $n + 2$ sunt prime. Rezultă atunci că n nu divide $(n - 1)!$ și $n + 2$ nu divide $(n - 1)!$ deoarece factorii primi ai produsului $(n - 1)!$ sunt mai mici decât n .

Reciproc, să presupunem că pentru n impar și $n > 1$, numărul $(n - 1)!$ nu se divide prin n și nici prin $n + 2$ și vom arăta că n și $n + 2$ sunt prime. Dacă n este compus, atunci $n = ab$, $a > 1$, $b > 1$ și $a \leq n - 1$, $b \leq n - 1$. Dacă $a \neq b$ atunci $n = ab \mid (n - 1)!$. Dacă $a = b$, $n = a^2$ și cum a este impar rezultă $a \geq 3$, deci $n = a^2 \geq 3a > 2a$. Așadar $2a \leq n - 1$ și astfel a și $2a$ sunt factori diferiți ai produsului $(n - 1)!$. Deci $n = a^2 \mid (n - 1)!$ contrar ipotezei.

Dacă $n + 2$ este compus, $n + 2 = ab$ cu a și b numere întregi mai mari decât 1. Deoarece n este impar, numerele a și b sunt impare și mai mari sau egale cu 3. Avem deci $n + 2 \geq 9$ și apoi $a \leq \frac{1}{3}(n + 2) < \frac{1}{2}(n - 1)$ și deci $2a < n - 1$. Analog $2b < n - 1$. Dacă $a \neq b$, atunci a și b sunt factori diferiți ai produsului $(n - 1)!$ și $n = a \cdot b \mid (n - 1)!$ contrar ipotezei. Dacă $a = b$ atunci a și $2b$ sunt factori diferiți ai produsului $(n - 1)!$ și $n + 2 = ab \mid 2ab$ iar $2ab \mid (n - 1)!$. Astfel $n + 2 \mid (n - 1)!$ contrar ipotezei.

44.(L) Suma cuburilor a două numere prime gemene se divide cu 36, cu excepția unui caz.

Rezolvare. Dacă p și $p + 2$ sunt numere prime gemene, atunci:

$$p^3 + (p + 2)^3 = (2p + 2)(p^2 + 2p + 4)$$

Dar numerele prime mai mari decât 3 pot fi doar de forma $6k + 1$ sau $6k - 1$.

Deci $p = 6k - 1$ și înlocuind în relația de mai sus obținem:

$$p^3 + (p + 2)^3 = 36k(12k^2 + 1) : 36$$

Excepție face perechea 3,5.

45.(L) Numerele p și $p + 2$ sunt simultan prime dacă și numai dacă are loc congruența:

$$4[(p - 1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p(p + 2)} \quad (\text{Teorema lui Clement})$$

Rezolvare. Fie p și $p + 2$ prime. Din teorema lui Wilson avem:

$$(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

$$(p + 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p + 2} \quad (2)$$

Înmulțind congruența (1) cu 4 și adunând-o cu congruența $p \equiv 0 \pmod{p}$, obținem:

$$4[(p - 1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p} \quad (3)$$

Adunând congruența (2) cu congruența $p(p + 1) \equiv -p \pmod{p + 2}$ și simplificând cu $p + 2$ obținem:

$$p[(p - 1)! + 1] \equiv -1 \pmod{p + 2}$$

Înmulțind aceasta cu 4 și adunând-o cu congruența $p^2 \equiv p^2 \pmod{p + 2}$ obținem:

$$4p[(p - 1)! + 1] + p^2 \equiv p^2 - 4 \equiv 0 \pmod{p + 2}$$

De aici găsim:

$$p\{4[(p - 1)! + 1] + p\} \equiv 0 \pmod{p + 2}$$

Iar apoi prin simplificare cu p :

$$4[(p - 1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p + 2} \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă congruența cerută.

Reciproc, dacă are loc congruența din enunț, din ea rezultă (3) iar din aceasta (1) și din reciproca teoremei lui Wilson rezultă p prim. Tot din congruența din enunț rezultă (4) iar din aceasta (2) și din reciproca teoremei lui Wilson deducem că $p + 1$ este prim.

Numere prime în progresie aritmetică

46.(L) Dacă n numere prime formează o progresie aritmetică, atunci rația progresiei se divide prin fiecare număr prim $p < n$.

(M. Contor)

Rezolvare. Fie $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$ cele n numere prime în progresie aritmetică și p un număr prim cu $p < n$. Prin împărțirea la p a acestor numere prime vom obține, într-o anumită ordine, resturile $1, 2, \dots, p - 1$ dacă $a \neq p$ sau resturile $0, 1, 2, \dots, p - 1$ dacă $a = p$. Deoarece numărul lor este mai mare decât numărul resturilor, cel puțin două din ele vor da același rest. Fie

$$a + id = q_1 p + r \text{ și } a + jd = q_2 p + r \text{ cu } 0 \leq i < j \leq p - 1$$

De aici

$$(j - i)d = (q_2 - q_1)p = M_p \Rightarrow p \mid (j - i)d$$

Dar $j - i < p$ și deci p nu divide $j - i$. Rămâne $p \mid d$.

47.(L) Să se găsească o progresie aritmetică formată din 6 termeni, toate numere prime.

Rezolvare. Rația progresiei trebuie să se dividă cu toate numerele prime mai mici decât 6, (vezi problema **46**) deci prin 2, 3, 5 adică trebuie să se dividă prin 30. Avem de exemplu progresiile: 23, 53, 83, 113, 143, 173

$$11, 71, 131, 191, 251, 311$$

$$7, 37, 67, 107, 137, 167, 197, 227, 257.$$

48.(L) Să se demonstreze că o progresie aritmetică infinită de numere naturale diferite nu poate avea toți termenii numere prime.

Rezolvare. Dacă r este rația progresiei iar a_n este un termen oarecare, atunci

$$a_{m+n} = a_n + mr.$$

Pentru $a_n > 1$ și $m = a_n$ avem $a_{m+n} = a_n + a_n r = a_n(1 + r)$, de unde rezultă că a_{m+n} este compus fiindcă $r \geq 1$.

Șirul infinit al numerelor prime

49.(L) Există o infinitate de numere prime de forma $4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$.

Rezolvare. Fie p un număr prim de forma $4k + 3$. Vom demonstra că există un alt număr prim p_1 de această formă cu $p_1 > p$. Într-adevăr, fie $x = 4p! - 1$ care este de forma $4k + 3$ deoarece $x = 4(p! - 1) + 3$.

Dacă x este prim, atunci $p_1 = x$.

Dacă x nu este prim atunci toți factorii primi ai săi sunt mai mari decât p , deoarece în caz contrar obținem o contradicție (factorii mai mici decât p ar trebui să-l dividă pe 1). Mai mult, cel puțin unul dintre factorii primi ai lui x este de forma $4k + 3$ (dacă toți factorii ar fi de forma $4k + 1$ atunci produsul lor, adică x , ar fi de forma $4k + 1$, ceea ce este fals).

50.(L) Există o infinitate de numere prime de forma $6k + 5$, $k \in \mathbf{N}$.

Rezolvare. Demonstrația este analoagă cu cea a exercițiului anterior.

51.(L) Există o infinitate de numere prime de forma $4k + 1$, $k \in \mathbf{N}$.

Rezolvare. Fie numărul $x = (n!)^2 + 1$ care este de forma $4k + 1$, pentru $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Dacă x nu este prim are toți factorii primi mai mari decât n și de forma $4k + 1$. Într-adevăr, dacă ar exista un factor prim $p = 4k + 3$ cu $p \mid x$, cum $x \mid (n!)^{2(2k+1)} + 1$, ar rezulta că și $p \mid (n!)^{2(2k+1)} + 1$, adică $p \mid (n!)^{p-1} + 1$. Deci $p \mid (n!)^p + n!$. Dar de aici și din faptul că $p \mid (n!)^p - n!$ (conform teoremei lui Fermat) rezultă că $p \mid 2n!$ ceea ce e fals deoarece p este factor prim mai mare decât n .

Deci, pentru orice număr prim p de forma $4k + 1$, există un număr prim p_1 de aceeași formă, cu $p_1 > p$, fiindcă sau $(p!)^2 + 1$ este prim și atunci $p_1 = (p!)^2 + 1 > p$ sau are un factor prim p_1 de forma $4k + 1$ cu $p_1 > p$.

Utilizarea postulatului lui Bertrand

52.(L) Să se demonstreze că $p_n < 2^n$ pentru $n > 1$ unde p_n este al n -lea număr prim din șirul numerelor naturale.

Rezolvare. Conform postulatului lui Bertrand avem $p_k < p_{k+1} < 2p_k$ pentru $k \in \mathbf{N}$. Deci $p_2 < 2p_1, p_3 < 2p_2 \dots p_n < 2p_{n-1}$, inegalități care prin înmulțire membru cu membru dau $p_n < 2^{n-1} p_1 = 2^n$.

53.(L) Să se demonstreze că $p_n^2 < 2^n$ pentru $n \geq 10$.

Rezolvare. Demonstrația se face prin inducție. Pentru $n = 10, p_{10} = 29$ și $29^2 < 2^{10}$ și exercițiul se verifică. Presupunem relația din enunț, adevărată prin orice k , cu $10 < k \leq n$ și o demonstrăm pentru $n + 1$. Utilizând teorema care afirmă că între m și $2m$ ($m > 5$ întreg) există cel puțin două numere prime, găsim că $p_{n-1} < p_n < p_{n+1} < 2p_{n-1}$. Deci, $p_{n+1}^2 < 4p_{n-1}^2 < 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$.

Teoremele lui Fermat, Euler, Wilson

54.(L) Fie p prim și a_1, a_2, \dots, a_n întregi. Să se demonstreze că:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p \equiv (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p) \pmod{p}$$

iar de aici să se deducă teorema lui Fermat.

Rezolvare. Din binomul lui Newton și din $p \mid C_p^i$ pentru $i = \overline{1, p-1}$, obținem:

$$(a_1 + a_2)^p = a_1^p + C_p^1 a_1^{p-1} a_2 + \dots + C_p^{p-1} a_1 a_2^{p-1} + a_2^p \equiv (a_1^p + a_2^p) \pmod{p}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)^p \equiv (a_1 + a_2)^p + a_3^p \equiv (a_1^p + a_2^p + a_3^p) \pmod{p}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^p \equiv (a_1 + a_2 + a_3)^p + a_4^p \equiv (a_1^p + a_2^p + a_3^p + a_4^p) \pmod{p}$$

.....

Luând apoi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, obținem teorema lui Fermat.

55.(L) Să se demonstreze că teoremele lui Fermat și Wilson sunt echivalente cu următoarea teoremă:

Dacă p este un număr prim și a un număr întreg, atunci $(p - 1)! a^p + a$ se divide la p .

(I. Moser)

Rezolvare. Arătăm mai întâi că din teoremele lui Fermat și Wilson rezultă teorema din enunț. Astfel, dacă p este prim și a întreg arbitrar, din teorema lui Wilson rezultă că $(p - 1)! a^p + a^p \equiv 0 \pmod{p}$, iar din teorema lui Fermat că $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$ adică relația din enunț.

Reciproc, luând în teorema din enunț $a = 1$, obținem teorema lui Wilson. De aici obținem $(p - 1)! a^p + a^p \equiv 0 \pmod{p}$ iar din aceasta scăzând relația din teorema din enunț, obținem teorema lui Fermat.

56.(L) Teoremele lui Fermat și Wilson sunt echivalente cu următoarea teoremă:

Dacă p este un număr prim, atunci pentru orice număr întreg a , numărul $a^p + (p - 1)!a$ se divide la p .

Rezolvare. Demonstrație analogă cu cea a exercițiului precedent.

57. (L) Dacă p este prim și $p > 3$ atunci $a^p - a \equiv 0 \pmod{6p}$.

Rezolvare. Avem $6 \mid (a - 1)a(a + 1)$ și $(a - 1)a(a + 1) \mid a^p - a$ iar din teorema lui Fermat $p \mid a^p - a$. Cum $p > 3$ avem $(p, 6) = 1$ și din relațiile precedente obținem $6p \mid a^p - a$.

58.(L) Știind că suma a două numere naturale nenule a și b este un număr prim, să se afle restul împărțirii numărului $a^b b^a$ prin $a + b$.

Rezolvare. Presupunem $a < b$ și fie $p = a + b$. Din binomul lui Newton și teorema lui Fermat, deducem:

$$a^b b^a = a^b (p - a)^a = a^b [M_p + (-1)^a a^a] = M_p + (-1)^a a^p = M_p + (-1)^a a$$

Deci $a^b b^a = M_p + a$ pentru a număr par și $a^b b^a = M_p + b$ pentru a număr impar. Astfel, restul împărțirii lui $a^b b^a$ prin $a + b$ este a sau b .

59. (L) Dacă p și q sunt două numere prime distincte și $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ și $a^q \equiv b^q \pmod{q}$ atunci $a \equiv b \pmod{pq}$

Rezolvare. Din teorema lui Fermat avem $a^p \equiv a \pmod{p}$ și $b^p \equiv b \pmod{p}$ și folosind condiția din enunț obținem $a \equiv b \pmod{p}$. Analog obținem $a \equiv b \pmod{q}$. Cum $(p,q) = 1$, rezultă $a \equiv b \pmod{pq}$

60. (L) Dacă p este prim și $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, atunci $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}$

Rezolvare. Dacă $(a,p) = 1$ din condiția din enunț rezultă $(b,p) = 1$ și din teorema lui Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ și $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, de unde $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$ obținem că $2 \equiv 0 \pmod{p}$, deci $p = 2$ care verifică relația cerută.

Dacă $p \mid a$ atunci $p \mid b$ și $a^{p-1} = M_{p^{p-1}}$ și $b^{p-1} = M_{p^{p-1}}$, deci $a^{p-1} + b^{p-1} = M_{p^{p-1}}$.

61. (L) Dacă p este prim și p mai mare decât 5 atunci orice număr format din $p - 1$ cifre egale se divide cu p .

Rezolvare. Fie $N = \underbrace{aa\dots a}_{dep-1ori} = a \cdot \underbrace{11\dots 1}_{dep-1ori} = a(10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10 + 1)$,

$9N = a(10 - 1)(10^{p-2} + 10^{p-3} + \dots + 10 + 1) = a(10^{p-1} - 1)$. Cum p este prim și $p > 5$, atunci $(p,10) = 1$ și conform teoremei lui Fermat $10^{p-1} - 1 = M_p$. Deci $p \mid 9N$ de unde $p \mid N$.

62. (L) Să se arate că dacă p este un număr prim impar și $a^p + b^p = M_p$, atunci $a^p + b^p = M_{p^2}$.

Rezolvare. Notă $a + b = c$ și ridicăm la puterea p după binomul lui Newton:

$C^p = (a + b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + \dots + C_p^i a^{p-i} b^i + \dots + C_p^{p-1} a b^{p-1} + b^p$.

Prin ipoteză $p \mid a^p + b^p$ iar $p \mid C_p^i$ pentru $i = \overline{1, p-1}$ deoarece p este prim.
Rezultă $p \mid C^p$ de unde $p \mid C$. Deci $C = mp$ și deci $a = mp - b$ de unde $a^p = (mp - b)^p = M_{p^2} - b^p$ și astfel $a^p + b^p = M_{p^2}$.

Bibliografie

- [1] Acu, D., *Aritmetica și teoria numerelor*, Editura Universității "Lucian Blaga", Sibiu, 1999
- [2] Bușneag, D., Boboc, F., Piciu, D., *Aritmetica și teoria numerelor*, Editura Universitaria, Craiova, 1999
- [3] Cucurezeanu, I., *Probleme de aritmetică și teoria numerelor*, Editura Tehnică, București, 1976
- [4] Dăncilă, I., *Divizibilitatea numerelor*, Editura Sigma, București, 2001
- [5] Sierpinski, W., *Ce știm și ce nu știm despre numerele prime*, Editura Științifică, București, 1966
- [6] Țelinoiu, P., *Culegere de exerciții și probleme de aritmetică*, Editura Porto-Franco, Galați, 1991
- [7] Colecția *Gazeta Matematică*